z.B.: $\dim_K(K^n) = n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ $\quad (1, i)$

$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ unendlich

Beweis

wieder „nur" im endlich erzeugten Fall.

Zunächst:

z.B.: $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6, \underline{b}_7)$ $\quad d = 7$

$\mathcal{U} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ $\quad l = 2$

$\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6, \underline{b}_7)$

$i_1 = 3 \qquad i_2 = 6$

$\mathcal{B}' = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{u}_1, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{u}_2, \underline{b}_7)$

Beweis: per Induktion über ℓ

IA: $\ell = 0$. ✓

IV: Satz gilt, falls $\mathcal{U}$ der Länge ℓ!

IS: Nach Umnummerierung gilt nach IV

$$\mathcal{B} = (\overbrace{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_\ell}^{\checkmark}, \underline{b}_{\ell+1}, \ldots, \underline{b}_d) \text{ Basis}$$

$$\mathcal{U} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_\ell, \underline{u}_{\ell+1}) \text{ linear unabh.}$$

$$\mathcal{B}_\ell = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_\ell, \underline{b}_{\ell+1}, \ldots, \underline{b}_d) \text{ Basis}$$

Zu zeigen:

$d \geq \ell+1$, und wir können einen der Vektoren $\underline{b}_{\ell+1}, \ldots, \underline{b}_d$ gegen $\underline{u}_{\ell+1}$ tauschen.

Da $\mathcal{B}_\ell$ Basis ist:

$$(*) \quad \underline{u}_{\ell+1} = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \cdot \underline{u}_j + \sum_{i=\ell+1}^{d} \lambda_i \underline{b}_i$$

(für gewisse $\mu_j, \lambda_i \in K$).

Da $\mathcal{U}$ linear unabhängig:

$\exists\, k \in \{l+1, \dots, d\}$ mit $\lambda_k \neq 0$.

Insbesondere $d \geq l+1$.

OE $k = l+1$ (also $\lambda_{l+1} \neq 0$).

Beh: Können $\underline{b}_{l+1}$ gegen $\underline{u}_{l+1}$ tauschen, d.h.

$$\mathcal{B}_{l+1} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_l, \underline{u}_{l+1}, \underline{b}_{l+2}, \dots, \underline{b}_d)$$

ist eine Basis.

$\mathcal{B}_{l+1}$ ist Erzeugendensystem:

Alle Vektoren der Basis $\mathcal{B}_l$ liegen span$(\mathcal{B}_{l+1})$:

$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_l$
$\underline{b}_{l+2}, \dots, \underline{b}_d$ $\in \operatorname{span}(\mathcal{B}_{l+1})$ ✓

$\underline{b}_{l+1} \in \operatorname{span}(\mathcal{B}_{l+1})$ wegen $(*)$

Also $V = \operatorname{span}(\mathcal{B}_l) \subset \operatorname{span}(\mathcal{B}_{l+1})$

$\mathcal{B}_{l+1}$ linear unabhängig:

Nach Ergänzungslemma reicht es zu zeigen

$$\underline{u}_{l+1} \notin \operatorname{span}(\underbrace{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_l, \cancel{\underline{b}_{l+1}}, \underline{b}_{l+2}, \dots, \underline{b}_d}_{\text{linear unabhängig}})$$

Angenommen

$$\underline{u}_{l+1} \in \operatorname{span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_l, \cancel{\underline{b}_{l+1}}, \underline{b}_{l+2}, \dots, \underline{b}_d)$$

Dann

$$\underline{u}_{l+1} = \sum_{j=0}^{l} \hat{\mu}_j \cdot \underline{u}_j + \sum_{i=l+2}^{d} \hat{\lambda}_i \underline{b}_i$$

$$\underline{u}_{l+1} = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \cdot \underline{u}_j + \sum_{i=l+1}^{d} \lambda_i \underline{b}_i \qquad (*)$$

$$\lambda_{l+1} \neq 0$$

$$\underline{0} = \sum_{j=1}^{l} (\mu_j - \hat{\mu}_j) \underline{u}_j + \lambda_{l+1} \underline{b}_{l+1} + \sum_{i=l+2}^{d} (\lambda_i - \hat{\lambda}_i) \cdot \underline{b}_i$$

↯ lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}_e$. $\square$

Beweis Dimensionssatz (endlich-erz. Fall)

V endlich erzeugt. Nach Auswahlsatz $\exists$ endliche Basis $\mathfrak{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$ von V.

Sei $\mathfrak{B}'$ weitere Basis von V.

Austauschsatz:

(a) $$\left.\begin{array}{l} \text{Basis } \mathfrak{B} \\ \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell \text{ beliebig (endlich) viele} \\ \text{Vektoren aus } \mathfrak{B}' \end{array}\right\} \quad \ell \leq d$$

Also besteht $\mathfrak{B}'$ aus **höchstens** d Vektoren

(b) $$\left.\begin{array}{l} \text{Basis } \mathfrak{B}' \\ \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d \end{array}\right\} \quad \mathfrak{B}' \text{ besteht aus } \textbf{mindestens } d \text{ Vektoren}$$

$\square$

Beweis:

Ergänze Basis $\mathcal{B}_W$ von W zu einer Basis $\mathcal{B}_V$ von V

Da V endlich-erzeugt, ist $\mathcal{B}_V$ endlich. Das zeigt:

W endlich-erzeugt

und $\dim W \le \dim V$.

$(\Rightarrow)$ $\mathcal{B}_V$ ist genauso lang wie $\mathcal{B}_W$,

daher $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W$,

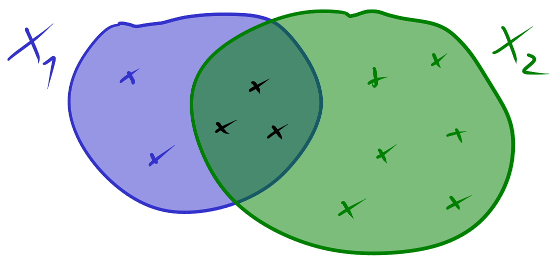
also $\underbrace{\operatorname{span}(\mathcal{B}_V)}_{= V} = \underbrace{\operatorname{span}(\mathcal{B}_W)}_{= W}$

$(\Leftarrow)$

$\square$

Vergleiche für Mengen X_1, X_2:

$$|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$$



Beweis: Wähle Basis

$$\mathcal{B}_0 = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_\ell) \quad \text{von } W_1 \cap W_2$$

Ergänze mit Basisergänzungssatz zu Basen

$$\mathcal{B}_1 := (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_\ell, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_m) \quad \text{von } W_1$$

$$\mathcal{B}_2 := (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_\ell, \underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_n) \quad \text{von } W_2 .$$

R.z.z.:

$$\mathcal{B} := (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_\ell, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_m, \underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_n)$$

ist Basis von $W_1 + W_2$.

$\mathcal{B}$ Erzeugendensystem von $W_1 + W_2$:

$$W_1 + W_2 = \operatorname{span}(W_1 \cup W_2) \quad \checkmark$$

$\mathcal{B}$ linear unabhängig:

Sei $\sum_i \lambda_i \underline{b}_i + \sum_j \mu_j \underline{c}_j + \sum_k \nu_k \underline{d}_k = 0$

Dann ist $\boxed{v := \sum_i \lambda_i \underline{b}_i + \sum_j \mu_j \underline{c}_j} \in W_1$

$$= \sum_k (-\nu_k)\, \underline{d}_k \quad \in W_2,$$

also $v \in W_1 \cap W_2$.

Da $\mathcal{B}_0$ Basis von $W_1 \cap W_2$ ist,

$\exists \lambda_i' \in K$, sodass $\boxed{v = \sum_i \lambda_i' \underline{b}_i .}$

Da $\mathcal{B}_1$ Basis von W_1, und da Darstellung zu einer Basis eindeutig, folgt:

$$\lambda_i = \lambda_i' \ \forall i \quad \text{und} \quad \underline{\mu_j = 0} \ \forall j.$$

Also $\sum_i \lambda_i \underline{b}_i + \sum_k \nu_k \underline{d}_k = 0$.

Da $\mathcal{B}_2$ Basis ist, folgt nun

$$\lambda_i = 0 \quad \forall i,$$
$$\nu_k = 0 \quad \forall k.$$

$\square$

<u>Def.</u> (vgl. 4. Vorlesung)

Eine <u>elementare</u> $\begin{matrix}\text{Zeilen}\\ \text{Spalten}\end{matrix}$ <u>umformung</u> ($E^Z_S U$) einer Matrix ist eine der folgenden Umformungen:

(Vert.) Vertauschung zweier $\begin{matrix}\text{Zeilen}\\ \text{Spalten}\end{matrix}$

(Add.) Addition des λ-fachen einer $\begin{matrix}\text{Zeile}\\ \text{Spalte}\end{matrix}$ zu einer <u>anderen</u> $\begin{matrix}\text{Zeile}\\ \text{Spalte}\end{matrix}$, für ein $\lambda \in K$

(Skalarm.) Multiplikation einer $\begin{matrix}\text{Zeile}\\ \text{Spalte}\end{matrix}$ mit $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.

//

<u>Beweis</u>: wie in 4. Vorlesung.

//

<u>Beweis</u> zum Basenfindungssatz:

<u>Spalten $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r$ von $\tilde{A}$ linear unabhängig:</u>

Sei $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tilde{a}_i = \underline{0}$.

Koordinate j_1: $\quad \lambda_1 \cdot \overbrace{a_{j_1 1}}^{\neq 0} = 0$

" $\quad j_2$: $\quad \lambda_1 \cdot a_{j_2 1} + \lambda_2 \cdot \overbrace{a_{j_2 2}}^{\neq 0} = 0$

$\vdots$

" $\quad j_r$: $\quad \lambda_1 \cdot a_{j_r 1} + \dots + \lambda_r \cdot \overbrace{a_{j_r r}}^{\neq 0} = 0$

Es folgt:

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$\lambda_r = 0 \quad ✓$$

<u>span$(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r) = W$:</u> siehe folgenden Satz. $\square$

<u>Beweis</u>: Übung $\square$

<u>Beispiel</u>: $W = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{cccc} & & -1 & -2 \\ A = & \left(\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & -1 \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{matrix}\right) \end{array}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

W hat Basis $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix}$

(insbesondere $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$).